



**HAL**  
open science

## Evaluation de la qualité des représentations numériques compatibles avec les préférences du décideur

Abdelhak Imoussaten, Jacky Montmain, J-B. Cellier, C. Daumas, J. Chambas

### ► To cite this version:

Abdelhak Imoussaten, Jacky Montmain, J-B. Cellier, C. Daumas, J. Chambas. Evaluation de la qualité des représentations numériques compatibles avec les préférences du décideur. LFA 2024 - rencontres franco-phones sur la Logique Floue et ses Applications, Nov 2024, Brest, France. <hal-04777737>

**HAL Id: hal-04777737**

**<https://imt-mines-ales.hal.science/hal-04777737v1>**

Submitted on 12 Nov 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Évaluation de la qualité des représentations numériques compatibles avec les préférences du décideur.

## Evaluation of the quality of the numerical representations compatible with the decision maker's preferences.

A. Imoussaten<sup>1</sup>  
J-B. Cellier<sup>2</sup>

J. Montmain<sup>1</sup>  
C. Daumas<sup>2</sup>

J. Chambas<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EuroMov Digital Health in Motion, Univ Montpellier, IMT Mines Ales, Alès, France, prenom.nom@mines-ales.fr

<sup>2</sup> IMT Mines Ales, Alès, France, prenom.nom@mines-ales.org

### Résumé :

Dans les problèmes de décision multicritère, le choix de la représentation numérique de la fonction de valeurs, parmi celles compatibles avec les préférences du décideur, est souvent arbitraire. De plus, pour une fonction de valeurs basée sur une intégrale de Choquet où le nombre de critères est très grand, il est difficile pour le décideur de fournir des informations sur ses préférences qui soient à la fois en quantité très large et en même temps représentatives. Dans cet article, afin d'éviter un choix arbitraire, nous proposons des indicateurs qui permettent d'évaluer la qualité des représentations numériques en fonction de certaines propriétés attendues comme la cohérence, la robustesse, et la préservation de l'ordre. Enfin, nous proposons une application des ces indicateurs pour une méthode de désagrégation présentée dans la littérature. Il s'agit d'établir un classement de 100 représentations numériques identifiées par cette méthode relativement aux indicateurs proposés.

### Mots-clés :

fonction de valeurs robuste, apprentissage de préférences, mesures floues, intégrale de Choquet.

### Abstract:

In multiple criteria decision problems, the choice of the numerical representation of the value function, among those compatible with the decision maker's preferences, is often arbitrary. Moreover, for a value function based on a Choquet integral where the number of criteria is very large, it is difficult for the decision maker to provide information about his preferences which is both in very large quantity and at the same time representative. In this article, in order to avoid an arbitrary choice, we propose indicators which make it possible to evaluate the quality of the numerical representations according to certain expected properties such as coherence, robustness and order preservation. Finally, we propose an application of these indicators for a disaggregation method presented in the literature. This involves establishing a ranking of 100 numerical representations identified by this method related to the proposed indicators.

### Keywords:

robust value function, preferences' learning, fuzzy measures, Choquet integral.

## 1 Introduction

L'identification du modèle des préférences du décideur est une tâche très compliquée pour l'utilisation des méthodes d'analyse multicritère. Pour les méthodes compensatoires dont la fonction de valeurs, permettant une représentation numérique des préférences du décideur, est basée sur un opérateur d'agrégation non-linéaire, par exemple une intégrale de Choquet, la tâche est encore plus compliquée. En effet, pour de tels opérateurs, la quantité de paramètres à renseigner est considérable quand le nombre de critères est très grand. Les méthodes indirectes d'obtention de ces paramètres, par exemple méthodes de désagrégation, ont l'avantage d'exiger moins d'effort cognitif pour le décideur que les méthodes directes. Les méthodes de désagrégation consistent à constituer une base d'apprentissage de comparaisons par paire d'alternatives bien maîtrisées par le décideur et ensuite en déduire, par la résolution d'un problème d'optimisation, la représentation numérique de la fonction de valeurs qui correspond à ces comparaisons. La base d'apprentissage en question peut être constituée d'informations purement ordinales, mais elle peut aussi contenir des informations cardinales sur l'écart entre les valeurs associées aux alternatives, par exemple, la méthode MACBETH [1]. Dans les deux cas, plusieurs représentations numériques sont compatibles avec la base d'apprentissage contenant les préférences du décideur. Malheu-

reusement, le choix de la représentation utilisée pour résoudre le problème de décision est souvent arbitraire. Il peut en résulter une représentation non-robuste des préférences du décideur étant donné que souvent la base d'apprentissage constituée n'est pas assez large et n'est pas assez représentative, i.e. une couverture de l'espace des valeurs des attributs insuffisante. Pour résoudre ce problème, la littérature s'est concentrée sur la construction de décisions robustes à partir de plusieurs représentations possibles des préférences. Dans [6], les auteurs proposent deux classements des alternatives : *nécessaire* et *possible* à partir d'informations ordinales sur les préférences en considérant deux relations de préférence faibles : la relation de préférence faible *nécessaire* qui est valable pour deux alternatives  $a$  et  $b$  lorsque pour toutes les fonctions de valeurs compatibles,  $a$  est préféré à  $b$ , et la relation de préférence faible *possible* qui est valable pour  $a$  et  $b$  lorsque pour au moins une fonction de valeurs compatible  $a$  est préférée à  $b$ . Dans le même esprit, les auteurs de [3], proposent dans le cas d'une relation de préférence incomplète ou intransitive de construire le pré-ordre total possible et nécessaire qui complètent la relation de départ. De plus, il existe des fonctions de valeurs compatibles pouvant donner des indices d'interactions entre critères avec des signes opposés. Certains travaux s'intéressent à la robustesse de ces indices en se basant sur les concepts de *possible* et *nécessaire* [11]. Ce problème se pose aussi dans le cas des problèmes d'optimisation multi-objectifs (Multi-objective optimization : MOO) où les algorithmes génétiques, par exemple, ont le désavantage de ne pas explorer certaines zones de l'espace et seulement des solutions locales sont trouvées. Dans [10], les auteurs examinent les indicateurs de qualité (IQ) des Front de Pareto retournés par les solveurs des problèmes MOO sur la base des aspects de qualité qu'ils capturent principalement : la convergence, la propagation, l'uniformité et la cardinalité. Dans cet article, nous considérons la situation où l'on doit choisir une seule fonction de valeurs pour représenter numériquement

les préférences du décideur. Afin d'éviter un choix arbitraire, nous proposons, dans ce travail exploratoire, de définir des indicateurs qui permettent d'évaluer la qualité de ces fonctions de valeurs à partir de certaines propriétés attendues comme la cohérence, la robustesse, et la préservation de l'ordre. Certains de ces propriétés ont été inspirées des travaux sur la qualité des Front de Pareto en MOO [10]. Pour illustrer ce travail, nous présentons le résultat d'un choix basé sur ces indicateurs pour une méthode d'obtention d'une fonction de valeurs non-additive exploitant la  $k$ -additivité de la capacité [7]. L'article est organisé de la façon suivante. La Section 2 donne le cadre théorique des indicateurs proposés. La Section 3 présente les différents indicateurs proposés. Enfin, la Section 4 présente l'illustration sur l'application de l'analyse de cycle de vie.

## 2 Rappels

Supposons que le décideur est intéressé par l'établissement d'un classement d'un ensemble fini d'alternatives  $\mathcal{A} = \{a^1, \dots, a^m\}$ , décrites suivant  $n$  attributs représentant différents points de vue. Cela sous-entend qu'il est difficile pour le décideur d'établir ce classement lui-même pour diverses raisons. Parfois, il est même difficile pour lui de comparer deux-à-deux ces alternatives. D'où l'intérêt d'utiliser les méthodes de désagrégation [8] car le décideur fournit ses préférences sur un ensemble d'alternatives  $\mathbb{B}$  faciles à comparer pour lui et ensuite, l'opérateur d'agrégation inféré est utilisé pour classer les alternatives de  $\mathcal{A}$ .

### 2.1 Les fonctions de valeurs multi-attributs

Nous considérons les notations suivantes.  $N = \{1, \dots, n\}$  désigne l'ensemble des attributs, chaque attribut prend ses valeurs dans un ensemble  $X_i$ , et  $X = \prod_{i \in N} X_i$  désigne l'espace d'évaluation des alternatives.

Dans le cadre de l'utilité multi-attributs, les préférences du décideur admettent une

représentation numérique, nommée *fonction de valeur*, notée  $v : X \rightarrow [0, +\infty]$  lorsque la relation binaire, notée  $\succsim$ , représentant les préférences du décideur sur les éléments de  $X$  est un *ordre faible*. Sous les hypothèses de 1) les attributs de  $N$  sont *faiblement préférentiellement indépendants* et 2)  $\succsim$  est un ordre faible, alors  $v$  admet la forme suivante [9] :

$$\forall x \in X, \quad v(x) = F(v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)) \quad (1)$$

où  $F$  est un opérateur d'agrégation et  $v_i(a_i), \forall i \in N$  sont les fonctions de valeurs marginales :  $v_i : X_i \rightarrow [0, +\infty]$ . Un candidat intéressant pour l'opérateur  $F$  est l'intégrale de Choquet basée sur une capacité [12]. Dans le cas particulier où pour chaque attribut  $i \in N$ , il existe un niveau de référence absolu dans  $X_i$ , noté  $\mathbf{1}_i$  (resp.  $\mathbf{0}_i$ ) tout à fait satisfaisant (resp. totalement inacceptable) pour le décideur avec  $v_i(\mathbf{1}_i) = 1$  (resp.  $v_i(\mathbf{0}_i) = 0$ ), alors  $v_i$  est bornée, i.e.  $v_i : X_i \rightarrow [0, 1]$ . On note dans ce cas  $\mathbf{0} \in X$  (resp.  $\mathbf{1} \in X$ ) le vecteur  $n$ -dimensionnel où toutes les composantes sont  $\mathbf{0}_i$  (resp.  $\mathbf{1}_i$ ).

## 2.2 Capacité et intégrale de Choquet

Une *capacité*  $\mu$  sur  $N$  est une fonction d'ensembles de  $2^N$  dans  $[0, 1]$  vérifiant :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\mu(N) = 1$  (Conditions aux limites);
2.  $\forall K, T \subseteq N$ , (conditions de monotonie)

$$K \subseteq T \implies \mu(K) \leq \mu(T).$$

Pour réduire le nombre de paramètres définissant une capacité dans certaines situations et faciliter la représentation d'une capacité, la notion de transformée de Möbius a été introduite en analyse multicritère [2]. En effet la notion de capacité  $k$ -additive [4] considère un nombre raisonnable d'attributs interactifs afin de parvenir à un compromis entre la quantité d'information requise du décideur pour définir les paramètres de la capacité et le modèle sophistiqué de  $v$  dans (1).

La transformée de Möbius d'une capacité  $\mu$  définie sur  $N$  est une fonction  $m_\mu : 2^N \rightarrow [0, 1]$  définie comme suit :

$$m_\mu(T) = \sum_{K \subseteq N: K \subseteq T} (-1)^{|T \setminus K|} \mu(K), \quad \forall T \subseteq N. \quad (2)$$

Soit  $k \in N$ . Une capacité  $\mu$  est  $k$ -additive si sa transformée de Möbius  $m_\mu$  vérifie :

1.  $m_\mu(T) = 0, \forall T \subseteq N$  tels que  $|T| > k$ ;
2.  $\exists K \subseteq N$  tel que  $|K| = k$  et  $m_\mu(K) \neq 0$ .

Pour faciliter la compréhension des coefficients de la capacité, plusieurs travaux ont essayé de les exprimer en utilisant plusieurs quantités comme les valeurs de *Shapley* et la quantification des interactions [4] : La valeur de *Shapley* exprime l'indice de pouvoir de  $i \in N$  :

$$v_i = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{m_\mu}{|T|} \quad (3)$$

$v_i$  peut être interprétée comme une valeur moyenne pondérée de la contribution marginale de l'attribut  $i$  seul dans toutes les coalitions [5]. L'interaction entre une paire d'attributs  $i, j \in N$  peut être exprimée comme suit :

$$I_{ij} = \sum_{T \subseteq N, T \supseteq \{i, j\}} \frac{m_\mu}{|T| - 1} \quad (4)$$

$I_{ij}$  peut être interprété comme une valeur moyenne pondérée de la valeur ajoutée produite en mettant ensemble  $i$  et  $j$ , en considérant toutes les coalitions [5]. Selon le signe de  $I_{ij}$ , les attributs peuvent avoir trois types de synergies [5] : 1) synergie positive :  $I_{ij} > 0$  (complémentarité); 2) synergie négative :  $I_{ij} < 0$  (redondance); et 3) pas de synergie :  $I_{ij} = 0$  (les attributs sont indépendants).

Une capacité permet d'exprimer les préférences du décideur dans l'agrégation par une intégrale de Choquet des performances d'une alternative sur l'ensemble des critères considérés. L'intégrale de Choquet pour un vecteur de valeurs  $(v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)) \in [0, 1]^n$ , où  $(x_1, \dots, x_n) \in X$ , par rapport à la capacité

$\mu$ , notée  $v(x) = CI_\mu(v_1(x_1), \dots, v_n(x_n))$ , est alors définie comme suit :

$$v(x) = \sum_{I \subseteq N} m_\mu(I) \min_{i \in I} v_i(x_i) \quad (5)$$

### 2.3 Informations ordinales et cardinales sur les préférences

Deux types d'informations sont demandées au décideur concernant les comparaisons des alternatives de la base d'apprentissage  $\mathbb{B}$ . Il s'agit d'abord, d'informations ordinales qui définissent deux relations binaires d'indifférence  $\sim$  et de préférence stricte  $\succ$  et ensuite des informations sur les écarts entre les valeurs associées aux alternatives définies par la relation  $\succsim^*$  appelée relation quaternaire. Ces trois types d'information induisent les résultats suivants sur la fonction de valeurs  $v$  recherchée :

- $\forall a, b \in \mathbb{B}, a \succ b \Rightarrow v(a) > v(b)$ ,
- $\forall a, b \in \mathbb{B}, a \sim b \Rightarrow v(a) = v(b)$ ,
- $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{B}$ ,

$$aa' \succsim^* bb' \text{ si } v(a) - v(a') \geq v(b) - v(b').$$

Nous allons noter par  $v(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$  l'ensemble des fonction de valeurs  $v : X \rightarrow [0, 1]$  compatibles avec les préférences  $\{\mathbb{B}, \succsim, \succ^*\}$ . Cet ensemble est naturellement infini. Nous faisons l'hypothèse dans cet article que les fonctions de valeurs marginale  $v_i$  ont été déjà identifiées séparément. Par conséquent, l'identification des fonctions de valeurs  $v(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$  se résume à l'identification des capacités compatibles avec les préférences  $\{\mathbb{B}, \succsim, \succ^*\}$ . Ainsi, l'objet de la Section 3 sera l'évaluation de la qualité de ces capacités identifiées dans ce que nous allons noter  $CAP(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$ .

## 3 Évaluation de la qualité des capacités

Le fait que le décideur ait été questionné sur un ensemble  $\mathbb{B}$  réduit d'alternatives conduira à identifier des capacités compatibles avec les préférences  $\{\mathbb{B}, \succsim, \succ^*\}$  mais à ne pas, forcément, bien généraliser sur  $\{X, \succsim, \succ^*\}$ . La qualité de cette généralisation dépendra du nombre

d'alternatives dans  $\mathbb{B}$  et du niveau de couverture de  $X$  par  $\mathbb{B}$ . Un facteur supplémentaire qui a une influence sur la qualité des capacités identifiées dans  $CAP(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$  est la méthode de désagrégation utilisée. Dans [10], les auteurs considèrent les fronts de Pareto retournés par plusieurs algorithmes et ils les comparent sur la base des indicateurs de qualité considérés.

Nous avons repensé les indicateurs de qualité proposés en faisant l'hypothèse de la connaissance de la vraie capacité  $\mu^*$  qui représente les préférences du décideur sur  $X$ . A partir de cette hypothèse, on doit s'attendre à ce qu'une capacité de bonne qualité doit être **cohérente** avec  $\mu^*$ , c'est-à-dire les coefficients associés à chaque sous-ensemble soient proches de ceux de  $\mu^*$ , les interactions soient des mêmes signes et proches, les indices de Shapley soient proches. De plus, une capacité de bonne qualité doit être **robuste**, c'est-à-dire, si l'on change légèrement les préférences dans  $(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$ , les nouvelles capacités identifiées doivent rester proches de celle-ci. Enfin, une capacité de bonne qualité doit **préserver le classement** final des alternatives tests dans  $\mathcal{A}$  obtenu avec  $\mu^*$ .

### 3.1 Indicateurs pour mesurer la cohérence

Nous définissons la cohérence d'une capacité  $\mu \in CAP(\mathbb{B}, \succsim, \succ^*)$  comme la stabilité de celle-ci par rapport à la référence  $\mu^*$ . Cette stabilité nous allons la quantifier en utilisant les écarts entre les grandeurs comme les coefficients de la capacité, les interactions entre attributs induit par la capacité et les indices de Shapley de cette capacité.

**Écart par rapport aux coefficients de la transformée de Möbius.** Cet indicateur, que nous appelons indicateur EQG, quantifie l'écart quadratique moyen entre la représentation de Möbius de  $\mu$  et celle de  $\mu^*$ . Cet indicateur prend ses valeurs dans  $[0, +\infty[$  et il est défini dans l'Équation (6).

$$EQG(\mu, \mu^*) = \frac{\sqrt{\sum_{T \subseteq N} [m_\mu(T) - m_{\mu^*}(T)]^2}}{2^{|N|}} \quad (6)$$

Notons que la distance quadratique est requise ici étant donné que les coefficients de la transformée de Möbius peuvent être négatifs.

**Écart par rapport aux indices de Shapley.** De la même façon que dans l'Équation (6), nous définissons l'écart quadratique moyen entre les indices de Shapley des deux capacités, noté EQS, dans l'Équation (7).

$$\text{EQS}(\mu, \mu^*) = \frac{1}{|N|} \sqrt{\sum_{i \in N} (\nu_i^\mu - \nu_i^{\mu^*})^2}, \quad (7)$$

où  $\text{EQS}(\mu) \in [0, 1]$  et  $\nu_i^\mu$  (resp.  $\nu_i^{\mu^*}$ ) est le  $i$ ème indice de Shapley relativement à la capacité  $\mu$  (resp.  $\mu^*$ ).

**Changement de signe des interactions.** L'indicateur concerné ici consiste à compter le nombre de paires d'attributs  $(i, j)$  pour lesquelles  $\mu$  induit des interactions de signe différent à celles induites par  $\mu^*$ . Dans l'Équation (8), nous définissons cet indicateur noté NDI, où le nombre des interactions de signe différent est rapporté au nombre de paires possibles.

$$\text{NDI}(\mu, \mu^*) = \frac{|\{ \{i, j\} : (I_{ij}^\mu, I_{ij}^{\mu^*}) \neq (0, 0) \ \& \ I_{ij}^\mu \cdot I_{ij}^{\mu^*} \leq 0 \}|}{|N|(|N| - 1)/2} \quad (8)$$

où  $I_{ij}^\mu$  (resp.  $I_{ij}^{\mu^*}$ ) est l'indice d'interaction entre les attributs  $i$  et  $j$  relativement à la capacité  $\mu$  (resp.  $\mu^*$ ). Notons que  $\text{NDI}(\mu, \mu^*) \in [0, 1]$  et que  $\text{NDI}(\mu, \mu^*) = 0$  signifie que les capacités  $\mu$  et  $\mu^*$  induisent pour toute paire d'attributs une synergie de même type.

### 3.2 Indicateurs pour mesurer la robustesse

Nous définissons la robustesse d'une capacité  $\mu$  comme la stabilité de celle-ci lorsqu'on lui impose des perturbations, c'est-à-dire de légères modifications, sur les préférences du décideur. Dans notre cas, nous allons apporter des modifications sur la relation  $\succ^*$  et nous allons vérifier si les nouvelles capacités obtenues, avec la résolution du même problème d'optimisation que celui ayant fourni la capacité  $\mu$ , restent cohérentes avec  $\mu$ . Nous allons, pour cela utiliser les mêmes indicateurs de cohérence définis dans les Équations (6), (7) et (8).

Supposons que nous avons effectué  $L$  perturbations sur la relation  $\succ^*$ . Chaque perturbation  $l$ ,  $l = 1, \dots, L$  fournit une capacité  $\mu^l$ . Nous définissons les trois indicateurs de robustesse suivant. L'indicateur REQG concerne la robustesse par rapport aux coefficients de  $\mu$

$$\text{REQG}(\mu) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \text{EQG}(\mu, \mu^l), \quad (9)$$

l'indicateur REQS concerne les indices de Shapley de  $\mu$

$$\text{REQS}(\mu) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \text{EQS}(\mu, \mu^l), \quad (10)$$

et l'indicateur RNDI concerne les interactions deux-à-deux de  $\mu$

$$\text{RNDI}(\mu) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \text{NDI}(\mu, \mu^l). \quad (11)$$

Ces indicateurs mesurent donc la stabilité locale, dans le sens où les capacités s'obtiennent avec le même algorithme, contrairement aux indicateurs de la cohérence qui mesurent une stabilité globale pour des capacités obtenues par des algorithmes différents. Dans les deux cas, quand les valeurs de ces indicateurs sont proches de zéro, nous avons un bon niveau de stabilité.

### 3.3 Indicateurs pour mesurer la préservation du classement

Dans cette partie, nous nous intéressons aux classements des alternatives obtenus par les fonctions de valeurs induites par les capacités obtenues. Il s'agit de quantifier à quel point un classement des alternatives de  $\mathcal{A}$  donné par une capacité  $\mu$  est proche de celui donné par la capacité de référence  $\mu^*$ . Les mesures de distance courantes pour les classements sont le *tau de Kendall*, i.e., compter le nombre de désaccords en termes de paires entre deux classements, et la "*distance*" de *Spearman*. Ici, nous allons privilégier la distance de Spearman comme exemple pour nos calculs. En effet, le tau de Kendall ne distingue pas l'ampleur des

écarts entre les rangs discordants. Une intervention entre des éléments proches ou éloignés est traitée de la même manière par cet indicateur.

Soient deux permutations  $\tau$  et  $\tau^*$  sur  $\mathcal{A}$ . La distance de Spearman entre  $\tau$  et  $\tau^*$  est définie comme le carré de la distance euclidienne entre le rang donné par  $\tau$  et celui donné par  $\tau^*$  :

$$d_S(\tau, \tau^*) = \sum_{j=1}^m (\tau(a^j) - \tau^*(a^j))^2 \quad (12)$$

## 4 Illustration

L'illustration que nous présentons concerne une étude en lien avec l'utilisation de l'analyse multicritère pour la prise de décision en Analyse de cycle de vie [7]. Dans cette étude, il s'agit de classer cinq véhicules, trois électriques de France (1 :EV FR), d'Allemagne (2 :EV DE), d'Europe (3 :EV EU27) et deux thermiques, Essence (4 :Gas) et Diesel (5 :Dies), sur la base de leurs impacts environnementaux : Changement climatique (1 :CC), Acidification (2 :AC), Eutrophisation (3 :Eutro), Consommation totale d'énergie (4 :TEC), Déchets radioactifs (5 :RW), Émissions radioactives (6 :RE) et Émissions de NOx (7 :Nox). Les valeurs dans la matrice de décision du tableau 1 représentent les impacts environnementaux et doivent donc être minimisées. La base d'apprentissage  $\{\mathbb{B}, \succsim\}$

Tableau 1 – Matrice de décision.

Attribute	EV DE	EV EU27	EV FR	Gas	Dies
CC (10 <sup>4</sup> kg CO2 equiv)	1.78	1.49	0.678	2.69	2.22
AC (kg SO2 equiv)	47.8	70.3	34.3	41.5	49
Eutro (kg Phosphate equiv)	4	4.27	2.56	3.75	6.46
TEC (10 <sup>5</sup> MJ)	3.09	2.99	3.02	4.11	3.32
RW (10 <sup>-2</sup> kg)	5.08	6.25	15.1	1.27	1.28
RE (Bq I129 equiv)	10.6	12.8	23.2	7.94	7.85
Nox (kg)	23.4	26.6	14.1	20	34.8

,  $\succ^*$ } correspondante aux préférences d'un des industriels questionné pour la comparaison des véhicules ci-dessus est présentée dans le Tableau 2. L'information ordinal  $\succsim$  est représentée, dans le Tableau 2, par le classement des alternatives à des rangs différents entre l'alternative totalement satisfaisante sur tous les

attributs (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) classée au premier rang et celle totalement inacceptable sur tous les attribut (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) classée au dernier rang. Notons que la relation  $\succ^*$  est représentée par les catégories sémantiques de différence d'attractivité entre deux rangs dans le classement des alternatives d'apprentissage dans le Tableau 2 allant de 1 : très faible à 6 :extrême.

Tableau 2 – Préférences du décideur.

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)  $\succ^2$  (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)  $\sim$  (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)  $\succ^2$   
(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)  $\sim$  (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)  $\succ^2$  (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)  $\sim$   
(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)  $\succ^3$  (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)  $\sim$   
(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)  $\succ^1$  (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)  $\sim$  (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)  $\sim$   
(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)  $\sim$  (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)  $\sim$  (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)  $\sim$  (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)  $\succ^3$   
(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)  $\succ^2$  (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)  $\succ^4$  (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)  $\succ^1$  (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)  $\sim$   
(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)  $\sim$  (0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)  $\succ^2$  (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)  $\succ^4$  (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)  $\sim$   
(0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)  $\sim$  (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

Notons aussi que le choix des alternatives de la Table 2 est dicté par le fait que nous voulions proposer des alternatives à des décideurs de cultures industrielles différentes et celles-ci étaient les plus faciles à comparer pour l'ensemble des décideurs.

### 4.1 Capacités générées et référence

Afin de générer les capacités à partir des préférences de la Table 2, nous avons implémenté l'algorithme itératif proposé dans [7] en utilisant l'interface AMPL<sup>1</sup> et le solveur non-linéaire ipopt<sup>2</sup>. D'une part, nous avons généré 100 capacités en rajoutant des contraintes supplémentaires à l'algorithme initiale. En effet, nous avons considéré pour chaque comparaison  $t$  de la Table 2, différente de l'équivalence, que l'écart de fonction de valeurs associées ne doit pas dépasser une valeur  $\alpha^t \in [0, 0.1]$ . Ensuite, nous avons fait plusieurs tirages aléatoires pour fixer ces contraintes en arrêtant la procédure une fois que nous avons obtenu 100 solutions de capacités suffisamment différentes. D'autre part, pour chaque capacité  $\mu$  parmi les 100 capacités, nous avons généré 4 capacités avec les mêmes contraintes  $\alpha^t$  que

1. A Modeling Language for Mathematical Programming

2. Interior Point Optimizer

celles de  $\mu$  mais en apportant des modifications aléatoires aux catégories sémantiques de différence d'attractivité données par le décideur en les augmentant ou diminuant d'un niveau.

Par ailleurs, nous considérons ici la capacité référence, faute de mieux, comme la capacité ayant la moyenne des coefficients des 100 capacités. En effet, en pratique, il est difficile d'obtenir une véritable capacité de référence.  $\forall T \subseteq N$ ,

$$\mu^*(T) = \frac{1}{100} \sum_{t=1}^{100} \mu^t(T) \quad (13)$$

## 4.2 Résultats des indicateurs

**Indicateurs pour mesurer la cohérence.** Les Figures 1 et 2 montrent respectivement les écarts des 100 capacités avec la référence en termes des coefficients de transformée de Möbius et d'indice de Shapley. Nous pouvons voir des capacités très éloignées de la référence et d'autres dont les deux indicateurs sont proches de 0. Concernant l'indicateur NDI, toutes

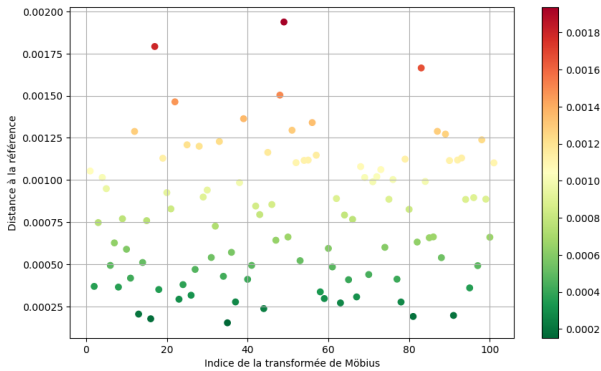


Figure 1 – Indicateur EQG

les 100 capacités induisent des interactions par paire de même signe que la référence. Par conséquent, cet indicateur n'apporte pas d'information supplémentaire dans notre cas d'étude.

**Indicateurs pour mesurer la robustesse.** Ici aussi, les Figures 3 et 4 montrent que parmi les 100 ca-

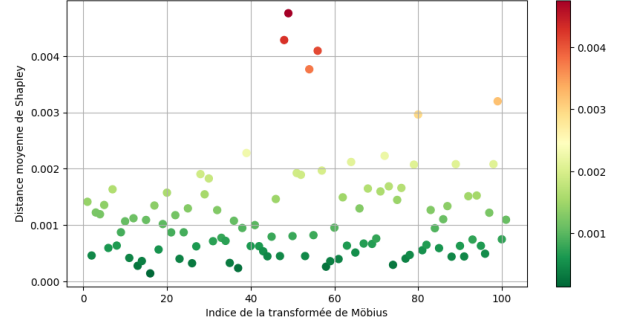


Figure 2 – Indicateur EQS

pacités, certaines sont très sensibles aux légers changements des préférences.

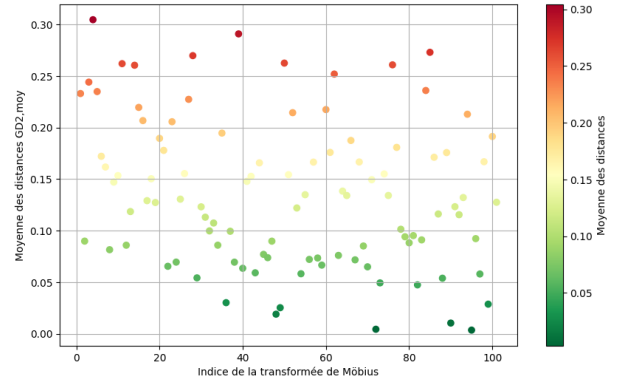


Figure 3 – Indicateur REQG des 100 capacités

**Indicateurs pour mesurer la préservation du classement.** Les 100 capacités induisent deux ordre différents sur les alternatives,  $\tau_1 = \{1, 2, 3, 5, 4\}$  dans 90% des cas et  $\tau_2 = \{1, 2, 4, 5, 3\}$  dans 10% des cas. Sachant que la capacité référence donne le classement  $\tau_1$ , donc, il faut éviter les 10% des capacités restantes.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit plusieurs indicateurs pour évaluer la qualité de capacités obtenues par apprentissage des préférences d'un décideur à partir d'informations ordinales et cardinales. En nous inspirant des travaux existants en MOO, nous avons défini

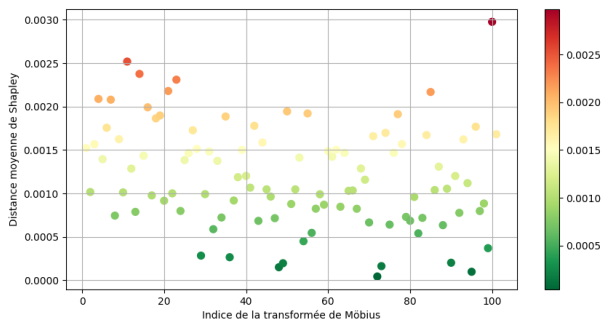


Figure 4 – Indicateur REQS des 100 capacités

ces indicateurs en nous appuyant sur les grandeurs associées à une capacité. Ces indicateurs quantifient la cohérence, la robustesse et la préservation de l'ordre par une capacité par rapport à une capacité référence. Plusieurs pistes d'amélioration de ce travail exploratoire sont possibles. Premièrement, il peut être complété par la détermination de la meilleure capacité ou du front de Pareto des capacités répondant au mieux et simultanément aux indicateurs proposés. Deuxièmement, le choix de la capacité moyenne comme référence peut être questionné en testant d'autres opérateurs. Troisièmement, au lieu de choisir les capacités candidates provenant d'une seule méthode de désagrégation, nous pouvons en confronter plusieurs. Enfin, d'autres indicateurs quantifiant des grandeurs comme l'entropie peuvent être testés.

## Références

- [1] Carlos A Bana e Costa, Jean-Marie De Corte, and Jean-Claude Vansnick. *On the mathematical foundations of MACBETH*. Springer, 2016.
- [2] Alain Chateauneuf and Jean-Yves Jaffray. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion. *Mathematical social sciences*, 17(3) :263–283, 1989.
- [3] Alfio Giarlotta and Salvatore Greco. Necessary and possible preference structures. *Journal of Mathematical Economics*, 49(2) :163–172, 2013.
- [4] Michel Grabisch. K-order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy sets and systems*, 92(2) :167–189, 1997.
- [5] Michel Grabisch. A constructive approach to multicriteria decision making. *Traitement du signal*, 22(4) :321, 2005.
- [6] Salvatore Greco, Vincent Mousseau, and Roman Słowiński. Ordinal regression revisited : multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, 191(2) :416–436, 2008.
- [7] Abdelhak Imoussaten. Practical extension of macbeth methodology to deal with sophisticated preferences' models. In *2022 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–8. IEEE, 2022.
- [8] Eric Jacquet-Lagrange and Yannis Siskos. Preference disaggregation : 20 years of mcda experience. *European Journal of Operational Research*, 130(2) :233–245, 2001.
- [9] David Krantz, Duncan Luce, Patrick Suppes, and Amos Tversky. *Foundations of measurement, vol. i : Additive and polynomial representations*. 1971.
- [10] Miqing Li and Xin Yao. Quality evaluation of solution sets in multiobjective optimisation : A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 52(2) :1–38, 2019.
- [11] Brice Mayag and Denis Bouyssou. Necessary and possible interaction between criteria in a 2-additive choquet integral model. *European Journal of Operational Research*, 283(1) :308–320, 2020.
- [12] Michio Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. Tokyo Institute of Technology, 1974.